Pascal Lainé

Nombres réels

Exercice 1 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1=\{x\in\mathbb{R},x^2<1\}$$
$$A_2=\{x\in\mathbb{R},x^3\leq 1\}$$
$$A_3=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{2x}{x^2+1}<1\right\}$$
$$A_4=\left\{x\in\mathbb{R}^*,\frac{1}{|x|}>1\right\}$$
$$A_5=\left\{x\in\mathbb{R},-1<\frac{1}{x^2-1}<1\right\}$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Trouver tous les réels x tels que $|x-1|+|x-2|=2$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Résoudre l'équation

$$\sqrt{41-x}+\sqrt{41+x}=10$$

Indication :

Malgré les apparences il n'est pas nécessaire de connaitre la valeur de 41^2

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

1. Résoudre

$$|u-1|+|u+1|=4$$

2. En déduire les solutions de

$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4$$

3. Puis les solutions de

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4$$

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Démontrer que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ est un nombre irrationnel.

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Montrer que $\alpha = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit

$$\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Montrer que $\alpha \in \sqrt{3}\mathbb{N}$ (C'est-à-dire de la forme $\sqrt{3}$ multiplié par un entier naturel).

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $\alpha = \sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

Calculer α.

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
2. $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
4. $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$. On rappelle que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soient a et b deux réels. On appelle $\alpha = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

Montrer que α est une racine d'une équation du troisième degré à coefficients réels

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = 0$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = -1$

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Montrer que pour tout réels x et y on a :
$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$$
2. Montrer que pour tout entier relatif on a :
$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$
On pourra distinguer les cas $m + n$ pair et $m + n$ impairs.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$E\left(\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2\right) = 4n + 1$$

On pourra montrer que $E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Montrer que pour tout x et y réels on a :
$$E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$$
On pourra distinguer les cas

$\left(E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \text{ ou } E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1\right)$ et $\left(E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} \text{ ou } E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1\right)$.

Ce qui fait 4 cas (n'est-ce pas ?).

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx) \quad (*)$$
Où $E(y)$ est la partie entière du réel y.

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \{0,1, \dots, n-1\}$ tel que
$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n}$$
On pourra appuyer son raisonnement en traçant la droite réelle et en plaçant
$$E(x), x, x + \frac{k}{n}, k \in \{0,1, \dots, n-1\}, E(x) + 1 \text{ et } x + \frac{p+1}{n}$$
2. En déduire que
$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p$$
Et $E(nx)$ en fonction de n, $E(x)$ et p.
3. Calculer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et calculer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$.
4. En coupant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ en 2, montrer l'égalité $(*)$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier strictement positif.
Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus que deux racines réelles si n est pair et plus que trois racines si n est impairs.

Allez à : Correction exercice 19 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = 2(a+b) - \left(a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b\right) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

Ces deux expressions ($\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{2}\sqrt{a+b}$) sont positives donc

$$\left(\sqrt{2}\sqrt{a+b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

La dernière assertion est vraie donc la première aussi.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$A_1 =]-1,1[$$
$$A_2 =]-\infty, 1]$$
$$1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$A_3 =]-\infty, -1[\cup]-1,1[\cup]1, +\infty[$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$
$$A_4 =]-1,0[\cup]0,1[$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1-1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-1)^2} > 0$$

Comme $x^2 - 2$ est positif si et seulement si $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

Donc

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$$

Par conséquent

$$A_5 =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

On pose $f(x) = |x-1| + |x-2|$

Pour $x \leq 1$, $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 \leq -1 < 0$ donc

$$f(x) = -(x-1) - (x-2) = -2x + 3$$

Pour $1 \leq x \leq 2$, $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$ donc

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = x - 1 - (x-2) = 1$$

Pour $x \geq 2$, $x - 1 \geq 1 > 0$ et $x - 2 \geq 0$ donc

$$f(x) = |x-1| + |x-2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

Puis on va résoudre $f(x) = 2$ sur chacun des trois intervalles.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq 1$ donc $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2 \leq x \end{cases}$$

$2 \leq \frac{5}{2}$ donc $\frac{5}{2}$ est solution.

Les réels qui vérifient $|x-1| + |x-2| = 2$ sont $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Les éventuelles solutions vérifient $41 - x \geq 0$ et $41 + x \geq 0$, autrement dit $-41 \leq x \leq 41$, ce sera bien le cas des deux solutions trouvées.

Comme ces deux expressions sont positives on a

$$\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow 41 - x + 2\sqrt{41-x}\sqrt{41+x} + 41 + x = 100$$
$$\Leftrightarrow 82 + 2\sqrt{41^2 - x^2} = 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{41^2 - x^2} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{41^2 - x^2} = 9 \Leftrightarrow 41^2 - x^2 = 9^2$$
$$\Leftrightarrow 41^2 - 9^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = (41-9)(41+9) \Leftrightarrow x^2 = 32 \times 50 = 16 \times 100 = (4 \times 10)^2 \Leftrightarrow x = \pm 40$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. On pose $f(u) = |u-1| + |u+1|$

   Si $u < -1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 < 0$ alors $f(u) = -(u-1) - (u+1) = -2u$

   $$\forall u < -1, f(u) = 4 \Leftrightarrow -2u = 4 \Leftrightarrow u = -2$$

   Si $-1 \leq u \leq 1$, , $u - 1 < 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = -(u-1) + (u+1) = 2$

   $f(u) = 4$ n'a pas de solution

   Si $u > 1$, $u - 1 > 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = (u-1) + (u+1) = 2u$

   $$\forall u > 1, f(u) = 4 \Leftrightarrow 2u = 4 \Leftrightarrow u = 2$$

   Il y a deux solutions -2 et 2.
2. D'après la première question il faut et il suffit de résoudre

$$\sqrt{x+1}=-2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1}=2$$

$\sqrt{x+1}=-2$ n'a pas de solution réelle et $\sqrt{x+1}=2$ équivaut à $x+1=4$, c'est-à-dire à $x=3$.

3.

$$x+2-2\sqrt{x+1}=x+1-2\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2$$

Et

$$x+2+2\sqrt{x+1}=x+1\mp\sqrt{x+1}+1=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$$

Par conséquent

$$\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}=4$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+1}+1\right|=4 \Leftrightarrow x=3$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

Supposons que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ soit un nombre rationnel, il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}^*$, on peut supposer qu'ils sont positifs tous les deux

tels que

$$\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}=\frac{p}{q}$$

On élève au cube

$$3+2\sqrt{6}=\frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}=\frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow \sqrt{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{q^3}-3\right)$$

Ce qui signifie que $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, il existe $p_1\in\mathbb{N}$ et $q_1\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1}$$

On peut supposer que p_1 et q_1 ne sont pas tous les deux pairs sinon on peut simplifier par 2.

$$\sqrt{6}=\frac{p_1}{q_1} \Leftrightarrow 6q_1^2=p_1^2 \quad (1)$$

Si p_1 est impair, son carré est aussi impair ce qui est impossible d'après (1) donc $p_1$est pair et donc q_1 est impair, il existe p_2 tel que $p_1=2p_2$ et q_2 tel que $q_1=2q_2+1$, ce que l'on remplace dan (1)

$$6(2q_2+1)^2=4p_2^2 \Leftrightarrow 3(4q_2^2+4q_2+1)=2p_2^2 \Leftrightarrow 3=2p_2^2-12q_2^2-12q_2$$

Ce qui est impossible, donc $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ n'est pas un nombre rationnel.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

$$a^2=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=7+4\sqrt{3}+2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}}+7-4\sqrt{3}$$
$$=14+2\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}=14+2\sqrt{7^2-4^2\times 3}=14+2\sqrt{49-48}$$
$$=14+2\times 1=16$$

Les deux valeurs possibles de a sont $a=-4$ et $a=4$, comme $a>0$, on a

$$a=4\in\mathbb{Z}$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

$$\alpha^2 = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{4^2 - 2^2 \times 3} = 8 + 2\sqrt{4} = 12$$

Donc $\alpha = 2\sqrt{3}$ car $\alpha > 0$ et $2 \in \mathbb{N}$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{4^2 - 2^2 \times 3}$$
$$= 8 - 2\sqrt{4} = 8 - 4 = 4$$

Donc $\alpha = \pm 2$ or $4 - 2\sqrt{3} < 4 + 2\sqrt{3}$ entraine que $\alpha = -2$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. Si α est rationnel alors
$$\sqrt{2} = \frac{\alpha - 6}{4}$$
Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.
Si β est rationnel alors
$$\sqrt{2} = \frac{\beta - 6}{-4}$$
Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.
Donc α et β sont irrationnel.
2.
$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})} = \sqrt{6^2 - 4^2 \times 2} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$$
3.
$$\left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 6 + 4\sqrt{2} + 4 + 6 - 4\sqrt{2} = 16$$
Comme $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0$, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$$
Ce qui entraine que
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}$$
Puis on élève au carré
$$2 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{3} + 3$$
On isole $\sqrt{3}$
$$\sqrt{3} = -\frac{q}{2p}\left(-\frac{p^2}{q^2} - 1\right)$$
Ce qui montre que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction, par conséquent
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$
Je rappelle que le raisonnement suivant est faux

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

2. Si $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \frac{p}{q}$$

On élève au carré

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$$

On isole $\sqrt{6}$

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{p^2}{q^2}\right)$$

Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a une contradiction donc

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 \notin \mathbb{Q}$$

3. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \frac{p}{q}$$

Ce qui entraine que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$

Puis on élève au carré

$$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{6} + 6$$

Ce qui équivaut à

$$5 + 2\sqrt{6} + \frac{2p}{q}\sqrt{6} = 6 + \frac{p^2}{q^2}$$

Soit encore

$$\sqrt{6} = \frac{1 + \frac{p^2}{q^2}}{2 + \frac{2p}{q}}$$

Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction par conséquent

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

4. Si $\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

On développe le carré avec la formule $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$3^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 6 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{2}\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{3}\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

Puis

$$36 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{12} + 4\sqrt{18} = \frac{p^2}{q^2}$$

En simplifiant et en arrangeant les choses

$$12\sqrt{6} + 6\sqrt{2^2 \times 3} + 4\sqrt{3^2 \times 2} = \frac{p^2}{q^2} - 36$$

$$12\sqrt{6}+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$
$$\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{1}{24}\left(\frac{p^2}{q^2}-36\right)$$

Ce qui entraine que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question 3. Il y a une contradiction donc

$$\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2\notin\mathbb{Q}$$

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

Supposons qu'il existe p et q des entiers naturels, non tous les deux pairs tels que

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

En élevant au carré on obtient

$$3=\frac{p^2}{q^2}\Leftrightarrow 3q^2=p^2\quad (*)$$

Si p est pair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3(4l^2+4l+1)=4k^2\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2\times 2k^2$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est pair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times 4l^2=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2\times 6l^2=2(2k^2+2k)+1$$

Le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p=2k+1$ et $q=2l+1$, ce que l'on remplace dans $(*)$

$$3\times(4l^2+4l+1)=4k^2+4k+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)+1=2(2k^2+2k)+1\Leftrightarrow 2(6l^2+6l+1)$$
$$=2(2k^2+2k)\Leftrightarrow 6l^2+6l+1=2k^2+2k\Leftrightarrow 2(3l^2+3l)+1=2(k^2+k)$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Donc $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

$$\alpha^3=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=a+3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+b=a+b+3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=a+b+3\sqrt[3]{ab}\alpha$$

Donc α vérifie

$$\alpha^3-3\sqrt[3]{ab}\alpha-a-b=0$$

Donc α est solution de

$$X^3-3\sqrt[3]{ab}X-a-b=0$$

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. Pour tous les entiers relatifs $E(x)=x$ et donc $E(-x)=-x$, donc $E(x)+E(-x)=0$
2. Pour tous réels

$$E(x)\leq x<E(x)+1$$

Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte

$$E(x) < x < E(x) + 1$$

On multiplie cette inégalité par -1

$$-E(x) - 1 < -x < -E(x)$$

Cela montre que

$$E(-x) = -E(x) - 1$$

Par conséquent

$$E(x) + E(-x) = -1$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. On a

$$\begin{cases} E(x) \leq x < E(x) + 1 \\ E(y) \leq y < E(y) + 1 \end{cases}$$

En faisant la somme

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2 \quad (*)$$

Donc

$$E(x+y) = E(x) + E(y) \quad \text{ou} \quad E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$$

Car ce sont les deux seuls entiers dans l'intervalle

$$[E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

Si dans $(*)$ on prend la partie entière, on obtient

$$E\big(E(x) + E(y)\big) \leq E(x+y) \leq E(E(x) + E(y) + 2)$$

On est obligé de changer le « $<$ » en « $\leq$ » dans la seconde égalité, à moins de préciser que $E(x) + E(y) + 2$ est un entier et alors l'inégalité reste stricte.

Puis comme $E(x) + E(y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont des entiers

$$E\big(E(x) + E(y)\big) = E(x) + E(y) \quad \text{et} \quad E(E(x) + E(y) + 2) = E(x) + E(y) + 2$$

Et on obtient

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 2$$

Ce qui n'est exactement ce que l'on demandait.

Beaucoup d'entre vous semble croire que

$$E(E(x) + E(y) + 2) = E\big(E(x)\big) + E\big(E(y)\big) + E(2) = E(x) + E(y) + 2$$

C'est correct uniquement parce que $E(x)$, $E(y)$ et 2 sont des entiers, mais il est faux de penser que pour tout x et y, $E(x+y) = E(x) + E(y)$ (enfin ce n'est pas toujours vrai).

2. Si $m+n$ est pair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m+n = 2p$ alors

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = E\left(\frac{2p}{2}\right) + E\left(\frac{2p-m-m+1}{2}\right) = E(p) + E\left(\frac{2p-2m+1}{2}\right)$$
$$= p + E\left(p - m + \frac{1}{2}\right) = p + p - m = 2p - m = n$$

Si $m+n$ est impair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m+n = 2p+1$

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = E\left(\frac{2p+1}{2}\right) + E\left(\frac{2p+1-m-m+1}{2}\right)$$
$$= E\left(p + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{2p-2m+2}{2}\right) = p + E(p-m+1) = p + p - m + 1$$
$$= 2p - m + 1 = n$$

Dans tous les cas on a

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$

3.

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=E\left(n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1\right)=E\left(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$=2n+1+E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)$$
$$\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2=4n(n+1)=4n^2+4n$$

Or

$$4n^2\leq 4n^2+4n<4n^2+4n+1$$

Ce qui équivaut à

$$2n\leq 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$

Par conséquent

$$E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right)=2n$$

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$E\left(\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right)=4n+1$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

- Premier cas :

$$E(x)\leq x<E(x)+\frac{1}{2}\ (*)\quad \text{et}\quad E(y)\leq y<E(y)+\frac{1}{2}\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)\leq x+y<E(x)+E(y)+1$$

On en déduit que

$$E(x+y)=E(x)+E(y)$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)\leq 2x<2E(x)+1\Rightarrow E(2x)=2E(x)$$
$$2E(y)\leq 2y<2E(y)+1\Rightarrow E(2y)=2E(y)$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)=E(x)+E(y)+E(x)+E(y)=2E(x)+2E(y)=E(2x)+E(2y)$$
$$\leq E(2x)+E(2y)$$

- Deuxième cas :

$$E(x)+\frac{1}{2}\leq x<E(x)+1\ (*)\quad \text{et}\quad E(y)\leq y<E(y)+\frac{1}{2}\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)+\frac{1}{2}\leq x+y<E(x)+E(y)+\frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x)+E(y)\leq E(x+y)\leq E(x)+E(y)+1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)+1\leq 2x<2E(x)+2\Rightarrow E(2x)=2E(x)+1$$
$$2E(y)\leq 2y<2E(y)+1\Rightarrow E(2y)=2E(y)$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)\leq E(x)+E(y)+E(x)+E(y)+1=2E(x)+1+2E(y)=E(2x)+E(2y)$$
$$\leq E(2x)+E(2y)$$

- Troisième cas :

$$E(x)\leq x<E(x)+\frac{1}{2}(*)\quad \text{et}\quad E(y)+\frac{1}{2}\leq y<E(y)+1\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)+\frac{1}{2}\leq x+y<E(x)+E(y)+\frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x)+E(y)\leq E(x+y)=E(x)+E(y)+1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)\leq 2x<2E(x)+1\Rightarrow E(2x)=2E(x)$$
$$2E(y)+1\leq 2y<2E(y)+2\Rightarrow E(2y)=2E(y)+1$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)\leq E(x)+E(y)+E(x)+E(y)+1=2E(x)+2E(y)+1=E(2x)+E(2y)$$
$$\leq E(2x)+E(2y)$$

- quatrième cas :

$$E(x)+\frac{1}{2}\leq x<E(x)+1(*)\quad \text{et}\quad E(y)+\frac{1}{2}\leq y<E(y)+1\quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x)+E(y)+1\leq x+y<E(x)+E(y)+2$$

On en déduit que

$$E(x+y)=E(x)+E(y)+1$$

On multiplie $(*)$ et $(**)$ par 2.

$$2E(x)+1\leq 2x\leq 2E(x)+2\Rightarrow E(2x)=2E(x)+1$$
$$2E(y)+1\leq 2y\leq 2E(y)+2\Rightarrow E(2y)=2E(y)+1$$

Donc

$$E(x)+E(y)+E(x+y)=E(x)+E(y)+E(x)+E(y)+1=2E(x)+2E(y)+1\leq 2E(x)+1+E(y)+1$$
$$=E(2x)+E(2y)$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. Les ensembles $I_k=\left]x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]$, $k\in\{0,1,..,n-1\}$ sont disjoints deux à deux et la réunion de ces intervalles est $]x,x+1]$, comme $E(x)+1\in]x,x+1]$ et que ces ensembles sont disjoints, $E(x)+1$ appartient à un et un seul de ces ensembles, donc il existe un unique $p\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tel que
$$x+\frac{p}{n}<E(x)+1\leq x+\frac{p+1}{n}\quad (**)$$
Remarque : l'ensemble des intervalle I_k, $k\in\{0,1,..,n-1\}$ forme une partition de $]x,x+1]$.
2. En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$x+\frac{p}{n}<E(x)+1\Leftrightarrow nx+p<nE(x)+n\Leftrightarrow nx<nE(x)+n-p$$
En prenant l'inégalité de droite dans $(**)$, on a les équivalences suivantes :
$$E(x)+1\leq x+\frac{p+1}{n}\Leftrightarrow nE(x)+n\leq nx+p+1\Leftrightarrow nE(x)+n-p-1\leq nx$$
En réunissant ces deux inégalités on trouve l'encadrement demandé par l'énoncé.
Comme
$$nE(x)+n-p-1\leq nx<nE(x)+n-p\Leftrightarrow nE(x)+n-p-1\leq nx<nE(x)+n-p-1+1$$
On a
$$E(nx)=nE(x)+n-p-1$$
3. Pour tout $k\in\{0,\dots,p\}$,
$$E(x)\leq x+\frac{k}{n}\leq x+\frac{p}{n}<E(x)+1$$
Donc $E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(x)$
Pour tout $k\in\{p+1,\dots,n-1\}$,

$$E(x)+1 \le x+\frac{p+1}{n} \le x+\frac{k}{n} \le x+\frac{n-1}{n} = x+1-\frac{1}{n} < x+1 < E(x)+1+1 = E(x)+2$$

Donc

$$E\left(x+\frac{k}{n}\right) = E(x)+1$$

4.

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{p} E\left(x+\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=p+1}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{p} E(x) + \sum_{k=p+1}^{n-1} (E(x)+1)$$
$$= (p+1)E(x) + (n-1-p)(E(x)+1)$$
$$= (p+1)E(x) + n(E(x)+1) - (1+p)E(x) - 1 - p = nE(x) + n - 1 - p = E(nx)$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

Si n est pair, il existe $m \ge 1$ tel que $n = 2m$

$$P'(x) = 2mx^{2m-1} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = 2m(2m-1)x^{2m-2}$$

Comme $2m-2$ est pair pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) > 0$ donc P' est croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $2m-1$ est impair

$$\lim_{x\to-\infty}(2mx^{2m-1}+p) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(2mx^{2m-1}+p) = +\infty$$

P' est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P'(\alpha) = 0$ et tel que

$$x < \alpha \Rightarrow P'(x) < 0 \quad \text{et} \quad x > \alpha \Rightarrow P'(x) > 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^{2m}+px+q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^{2m}+px+q) = +\infty$$

Le tableau de variation de P est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$P(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\alpha) > 0$ alors P n'a pas de solution.

Si $P(\alpha) = 0$ alors P n'a qu'une solution : α.

Si $P(\alpha) < 0$ alors P a deux solutions.

Si n est pair, il existe $m \ge 0$ tel que $n = 2m+1$

$$P'(x) = (2m+1)x^{2m} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = (2m+1)2mx^{2m-1}$$

Comme $2m-1$ est impair :

Si $x < 0$ alors $P''(x) < 0$ et $x > 0$ alors $P''(x) > 0$. De plus $P'(0) = p$. Comme $2m$ est pair les limites de P' en $\pm\infty$ sont $+\infty$.

On en déduit le tableau de variation de P'

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$P''(x)$		$-$	0	$+$	
$P'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	p	$\nearrow$	$+\infty$

Si $p \ge 0$ alors $\forall x \ne 0, P'(x) > 0$ et $P'(0) = 0$ ce qui montre que P est strictement croissante, comme $2m+1$ est impair

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

Cela montre que P est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Si $p < 0$ alors il existe deux réels $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$ et tels que le signe de P' soit strictement positif sur $]-\infty, \beta[\, \cup \,]\gamma, +\infty[$ et strictement négatif sur $]\beta, \gamma[$. comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de P

x	$-\infty$		β		γ		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(\beta)$	$\searrow$	$P(\gamma)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $P(\beta)$ et $P(\beta)$ sont strictement positifs ou strictement négatifs ($P(\beta)P(\gamma) > 0$) alors P n'a qu'une racine.

Si $P(\beta)$ ou $P(\beta)$ est nul ($P(\beta)P(\gamma) = 0$), remarque les deux ne peuvent pas être nul en même temps alors P a deux racines.

Si $P(\alpha) > 0$ et $P(\beta) < 0$ alors P a trois racines.

Allez à : Exercice 19 :